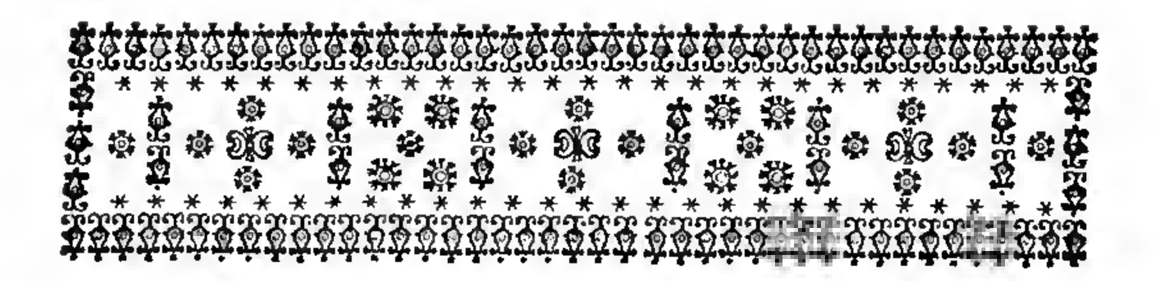


# CALCUL DE LA PROBABILITÉ DANS LE JEU DE RENCONTRE,

## PAR M. EULER.

I.

Le Jeu de rencontre est un Jeu de Hazard, où deux personnes ayant chacune un entier jeu de cartes, en tirent à la fois une carte après l'autre, jusqu'à ce qu'il arrive, qu'elles rencontrent la même carte : & alors une des deux personnes gagne. Or, lorsqu'une telle rencontre n'arrive point du tout, alors c'est l'autre des deux personnes qui gagne. Cela posé, on demande la probabilité, que l'une & l'autre de ces deux personnes aura de gagner.

II. Pour fixer mieux nos idées, on peut supposer que ces deux personnes dont l'une soit nommée A, & l'autre B, ayent chacune un certain & même nombre de billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4, 5 &c. & que chacune en tire un billet après l'autre, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le même numero à la fois : & que ce soit la personne A qui gagne alors. Or s'il arrive, que ces deux personnes tirent tous leurs billets sans rencontrer jamais le même nombre, que la personne B gagne.

III. Comme il est indifférent, de quel *numero* chaque billet soit marqué, il est permis de supposer que A tire ses billets selon l'ordre

1, 2,

1, 2, 3, 4, 5, &c. Ou pour faire l'application aux cartes, on concevra les cartes de l'un & l'autre jeu tellement numerotées selon l'ordre comme elles sont tirées successivement par A: de sorte que $N^{ro}$ 1. sera la carte que A tire la premiere, $N^{ro}$ 2. celle qu'il tire la seconde; $N^{ro}$ 3 la troisième, & ainsi de suite.

IV. Ainsi la personne A, qui est pour la rencontre, gagnera lorsque B tire de son paquet de cartes au premier coup $N^{ro}$ 1; ou au second $N^{ro}$ 2: ou au troisième $N^{ro}$ 3, ou au quatrième $N^{ro}$ 4, &c. Or s'il arrive, que le numero de la carte tirée par B ne répond jamais au numero de la carte tirée par A au même coup; ce sera alors B qui gagne le dépôt. Par ce moyen il semble que la recherche de ce jeu est renduë la plus aisée, pour y appliquer le calcul.

V. La question est donc de déterminer la probabilité, qu'aura tant A que B pour gagner le dépôt, quel que soit le nombre des cartes, ou des billets numerotés. Car on voit d'abord que cette détermination varie selon le nombre des billets, & qu'elle devient d'autant plus compliquée, plus le nombre des billets sera grand. Il conviendra donc de commencer cette recherche par les plus petits nombres de billets, & d'en partir pour arriver successivement à de plus grands.

VI. Supposons donc d'abord que l'un & l'autre des jouëurs n'ait qu'une seule carte marquée de 1. & il est clair que la rencontre ne sauroit manquer, de sorte que A gagnera infailliblement. Dans ce cas donc la probabilité de gagner de A sera exprimée par 1, & celle de B par 0: puisque celui-cy n'a aucune espérance de gagner.

VII. Que l'un & l'autre des jouëurs A & B ait maintenant deux cartes numerotées de 1 & 2; & que A tire ses cartes selon les numeros 1 & 2. Dans cette supposition il y aura deux cas: car B tirera ses deux cartes, ou dans l'ordre 1, 2. ou dans l'ordre 2 & 1. Le premier donnant d'abord au premier coup une rencontre fera gagner A, l'autre ne donnant aucune rencontre fera gagner B.

VIII.

VIII. Puisque donc l'un & l'autre de ces deux cas eſt également probable, tant A que B auront chacun un cas pour gagner. Et partant la probabilité de l'un & de l'autre ſera exprimée par $\frac{1}{2}$: ou bien chacun aura droit de prétendre à la moitié du dépôt.

IX. Poſons que les deux joueurs ayent chacun trois cartes marquées des nombres 1, 2, 3, & que A tire en premier lieu Nro 1. en ſecond Nro 2, en troiſième Nro 3. Or B pourra tirer ſes cartes en 6 manières différentes de la ſorte;

| | B | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |

& il y a également de probabilité que chacun de ces 6 cas arrive actuellement.

X. De ces 6 cas il y en aura donc deux, le premier & le ſecond, qui feront gagner A, & où le jeu finit par conſéquent au premier coup; des quatre autres cas il n'y en a qu'un, ſavoir le cinquième, qui fera gagner A au ſecond coup, & qui y finit le jeu. Parmi les trois autres cas, il y a encore le troiſième, qui fait gagner A au troiſième coup.

XI. Ainſi en tout, parmi tous les 6 cas poſſibles il y en a quatre, qui ſont favorables à A: & les deux autres, ſavoir le quatrième & le ſixième mettront B en poſſeſſion du gain. Donc A ayant quatre cas pour gagner, & B deux, l'eſpérance de A eſt $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, & celle de B $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$: ou l'avantage de A eſt deux fois plus grand que celui de B.

XII. Donnons maintenant à chacun de nos joueurs 4 cartes 1, 2, 3, 4; & pendant que A tire ſes cartes dans l'ordre 1, 2,

3, 4, l'ordre des cartes de B peut varier en 24 manières différentes, de la forte ;

| A | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | ~~2~~ | ~~2~~ | ~~3~~ | ~~3~~ | ~~4~~ | ~~4~~ | 3 | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | ~~3~~ | ~~4~~ | ~~4~~ | ~~2~~ | ~~2~~ | ~~3~~ | 4 | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | ~~1~~ | ~~4~~ | 2 | 3 | ~~3~~ | ~~1~~ | 1 | 2 |
| 4 | ~~4~~ | ~~3~~ | ~~2~~ | ~~4~~ | ~~3~~ | ~~2~~ | 1 | 4 | 3 | ~~1~~ | 3 | ~~4~~ | 2 | 3 | 4 | 2 | ~~4~~ | ~~1~~ | 3 | ~~2~~ | ~~1~~ | ~~3~~ | 2 | 1 |

& chacun de ces 24 cas eſt également poſſible.

XIII. Il eſt évident, que les ſix premiers cas ſont d'abord gagner A au premier coup ; & puisque le jeu s'y finit, j'ai rayé les nombres ſuivans de ces 6 colonnes. Des 18 cas qui reſtent il y en a 4, ſavoir les cas 17, 18, 21, & 22, qui font gagner A au ſecond coup, où ces colonnes ſeront par conſéquent terminées. Quatorze cas continueront donc le jeu jusqu'au troiſième coup; & il y en a trois, le 10, 12 & 20, qui terminent le jeu en faveur de A. Enfin des onze cas du reſte il n'y en a que deux, qui donnent une rencontre pour le quatrième & dernier coup.

XIV. Ayant donc 6 cas, où A gagne au premier coup, 4 cas où il gagne au ſecond coup, trois cas où il gagne au troiſième coup, & deux cas, où il gagne au quatrième coup ; il y aura en tout 15 cas favorables à A, & les 9 autres cas feront gagner B. Par conſéquent la probabilité de gagner de A ſera $= \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ & celle de B $= \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; ou bien l'eſpérance de A ſera à celle de B comme 5 à 3.

XV. Si nous poſons le nombre des cartes $= 5$, on auroit en tout 120 cas différens pour les variations, qui pourroient arriver dans l'ordre des cartes tirées par B, pendant que A tireroit ſes cartes ſelon

ſelon les numeros 1, 2, 3, 4, 5. Or cela meneroit trop loin, ſi nous voulions repréſenter tous ces cas, pour voir, combien en ſeroient favorables à A & à B; & un encore plus grand nombre de cartes rendroit cette repréſentation tout à ſait impraticable.

XVI. D'ailleurs un tel dénombrement actuel ne ſerviroit pas beaucoup à déterminer en général les eſpérances des deux joueürs A & B, quelque grand que ſoit le nombre des cartes. Pour cet effet il faut faire des remarques générales, qui nous puiſſent conduire à la connoiſſance des plus grands nombres de cartes, ſachant déja les probabilités pour les plus petits nombres.

XVII. Je remarque donc premièrement en général, que le nombre de cartes étant $= m$, il y aura autant de cas différens que le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, jusqu'à $m$ contient d'unités: ou bien ce nombre de cas eſt $= 1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots m$. Or je ſuppoſe toujours, que A tire ſes cartes ſelon l'ordre des numeros 1, 2, 3, 4 - - - - $m$, dont elles ſont marquées, & le produit $1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots m$ donnera le nombre des cas, qui peuvent arriver dans l'ordre des cartes tirées par B.

XVIII. Cela eſt clair par les premiers principes des combinaiſons, d'où l'on ſait que l'ordre de 2 cartes peut varier 2 fois, de 3 cartes, 6 fois; de 4 cartes 24 fois; de 5 cartes 120 fois; de 6 cartes 720 fois; de 7 cartes 5040 fois; de 8 cartes 40320 ſois; & en général de $m$ cartes autant de fois que le produit $1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots m$ contient d'unités.

XIX. Ce nombre de cas $1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots m$ étant poſé pour abréger $= M$, je remarque en ſecond lieu, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la premiere carte tirée par B eſt 1; qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas où la premiere carte tirée par B eſt 2: & qu'il y aura autant



de

de cas où la premiere carte de B est ou 3, ou 4, ou 5 &c. ou enfin $m$.

XX. De plus, si nous faisons abstraction, que le jeu finit aussi tôt, que B aura rencontré la carte de A, & que nous supposions qu'ils continuent à tirer leurs cartes jusqu'à la fin, quoiqu'il y fut arrivé une ou plusieurs rencontres, il est aussi clair, qu'il y aura $\frac{M}{m}$ cas, où la seconde carte de B sera 2 ; & autant de cas, où la troisiéme carte sera 3, ou la quatrième 4, ou la cinquième 5, ou la sixième 6, & ainsi de suite.

XXI. Donc, dans cette supposition, qu'on continuë de tirer les cartes jusqu'à la fin, il y aura $\frac{M}{m}$ cas, que A gagne au premier coup; de même $\frac{M}{m}$ cas, qu'il gagne au second coup, & toujours autant de de cas, qu'il gagne au troisième coup, ou au quatrième, ou au cinquième, &c. ou même au dernier coup.

XXII. Mais en effet quoiqu'il y ait $\frac{M}{m}$ cas, qui font gagner A au premier coup; il n'y aura pas autant de cas, qui le font gagner au second coup : puisque des $\frac{M}{m}$ cas, qui le feroient gagner au second coup, dans la supposition précedente, il faut retrancher ceux qui l'ont déjà fait gagner au premier coup ; car, dès qu'il aura gagné au premier coup, le jeu ne se continuë pas au delà.

XXIII. Il en est de même du nombre $\frac{M}{m}$ de cas, où B tireroit la carte Nro 3 ; car il en faut retrancher les cas, qui ont déjà rencontré, ou au premier coup, ou au second. Et pour que A gagne au qua-

quatrième coup, il faut ôter du nombre de tous les cas où cela arrive, qui eſt $= \frac{M}{m}$, ceux qui auront déjà eu une rencontre, ou dans le premier, ou dans le ſecond, ou dans le troiſième coup.

XXIV. En général donc, le nombre des cas qui feroient gagner A à un coup quelconque, étant $= \frac{M}{m}$, dans l'hypotheſe précédente, il en faut exclure tous ceux, où il s'eſt déjà trouvé une rencontre dans quelcun des coups précedens : de ſorte que le nombre des cas devient de plus en plus moindre, plus le coup eſt éloigné du commencement.

XXV. Pour juger donc de combien il faut diminuer le nombre des cas favorables $\frac{M}{m}$ à chaque coup, ou pour en connoitre le nombre de ceux qui ont déjà eu une rencontre dans quelque coup précédent, voilà comme je m'y prends. Je conçois que la carte qui ſe rencontre au coup propoſé ſoit ôtée de l'un & de l'autre jeu, & l'ordre des cartes & le nombre des cas ſera le même, que ſi le nombre des cartes étoit d'une unité moindre.

XXVI. Pour rendre cela plus intelligible, conſidérons le cas de 4 cartes & des 24 cas, qui y ont lieu, ceux où B tire au troiſième coup la carte Nro 3, qui ſont les cas marqués 1, 6, 10, 12, 20, 21. Otons de ces cas la carte marquée Nro 3, & nous aurons

| A | B | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 |

qui ſont préciſément les cas, qu'on auroit pour trois cartes marquées des nombres 1, 2, 4.

XXVII. Puisque ce ſont les cas, où B tire au troiſième coup la carte N^ro 3, & qu'il en faut retrancher ceux qui ont déjà eu une rencontre, ou dans le premier coup, ou dans le ſecond; il eſt clair que ce nombre à retrancher ſe trouve des cas de trois cartes, en ajoutant enſemble les cas, où A gagneroit alors au premier coup & au ſecond.

XXVIII. En général donc, ſi le nombre des cartes eſt $= m$, & qu'on veuïlle ſavoir de combien il faut diminuër le nombre de cas $\frac{M}{m}$, qui ont une rencontre à un coup quelconque; il faut avoir recours au nombre des cartes $= m - 1$, & en chercher les cas, qui feroient gagner A à quelcun des coups précedens, & le nombre de tous ces cas enſemble ſera celui dont il faut diminuer le nombre $\frac{M}{m}$, pour avoir le nombre de cas, qui feront gagner actuellement A à un coup propoſé.

XXIX. Poſons donc le nombre des cartes $= m$, & le nombre de tous les cas, qui lui convient $1. 2. 3. 4 \text{ - - - - } m = M$ & ſoit

| le nombre des cas | qui font gagner A |
|---|---|
| $a$ - - - - - - - | au premier coup |
| $b$ - - - - - - - | au ſecond coup |
| $c$ - - - - - - - | au troiſième coup |
| $d$ - - - - - - - | au quatrième coup |
| $e$ - - - - - - - | au cinquième coup |
| &c. | |

& nous avons vû que $a = \frac{M}{m}$; pour les autres nombres $b, c, d, e,$ &c. nous verrons bientôt leur progreſſion.

XXX. Soit maintenant le nombre des cartes d'une unité plus grand, ou $= m + 1$, & le nombre de tous les cas ſera

$=$

$= 1.2.3.4 \ldots (m+1) = M(m+1)$, qui soit $= M'$
Soit ensuite comme auparavant

| le nombre des cas | | qui font gagner A |
|---|---|---|
| $a'$ | - - - - - - - - | au premier coup |
| $b'$ | - - - - - - - - | au second coup |
| $c'$ | - - - - - - - - | au troisième coup |
| $d'$ | - - - - - - - - | au quatrième coup |
| $e'$ | - - - - - - - - | au cinquième coup |
| | &c. | |

XXXI. Cela posé, nous aurons $a' = \frac{M}{m+1} = M$: & en continuant le jeu, nonobstant les rencontres déjà arrivées, il y aura M cas aussi, où arriveroit une rencontre au second coup: mais de ceux-ci il faut exclure ceux qui ont déjà eu une rencontre au premier coup; & ce nombre étant $= a$, comme nous avons vû (28), nous aurons $b' = M - a$, pour le nombre des cas, qui font actuellement gagner A au second coup.

XXXII. Le nombre des cas, où la rencontre arrive au troisième coup étant aussi $= M$, & qu'il en faut exclure ceux qui ont déja eu de rencontre dans le premier ou second coup; c'est à dire ceux qui feroient gagner A au premier ou second coup, lorsque le nombre des cartes feroit d'une moindre, nous aurons le nombre des cas, qui feront actuellement gagner A au troisième coup $c' = M - a - b$.

XXXIII. Il en est de même des cas, qui feront gagner A à quelqu'un des coups suivant; & partant en connoissant les nombres $a$, $b$, $c$, $d$, &c. pour le nombre des cartes $= m$, nous en tirerons aisément les nombres $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, &c. lorsque le nombre des cartes est $= m + 1$. Car on aura

$a'$

$$
\begin{aligned}
a' &= M \\
b' &= M - a \\
c' &= M - a - b \\
d' &= M - a - b - c \\
e' &= M - a - b - c - d
\end{aligned}
$$

&c.

XXXIV. Sachant donc, que lorsque le nombre des cartes eſt $m = 1$, & $M = 1$, il eſt $a = 1$ ; on aura pour deux cartes $a' = 1$, & $b' = 1 - 1 = 0$; ſoit maintenant $m = 2$ ; & ayant $M = 2$ ; $a = 1$ ; $b = 0$, & on aura pour trois cartes :

$a' = 2$ ; $b' = 2 - 1 = 1$ ; $c' = 2 - 1 - 0 = 1$

Poſons de plus $m = 3$, & ayant $M = 6$ ; $a = 2$ ; $b = 1$ ; $c = 1$ nous aurons pour quatre cartes :

$a' = 6$ ; $b' = 6 - 2 = 4$ ; $c' = 6 - 2 - 1 = 3$ ; $d' = 6 - 2 - 1 - 1 = 2$

XXXV. De cette façon nous pourrons continuer ces nombres à des nombres de cartes auſſi grands qu'on voudra : & pour en voir mieux la progreſſion, repréſentons les de la manière ſuivante :

*NOMBRE DES CARTES*

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 |
| *b* | - | 0 | 1 | 4 | 18 | 96 | 600 | 4320 | 35280 | 322560 |
| *c* | - | - | 1 | 3 | 14 | 78 | 504 | 3720 | 30960 | 387280 |
| *d* | - | - | - | 2 | 11 | 64 | 426 | 3216 | 27240 | 256320 |
| *e* | - | - | - | - | 9 | 53 | 362 | 2790 | 24024 | 229080 |
| *f* | - | - | - | - | - | 44 | 309 | 2428 | 21234 | 205056 |
| *g* | - | - | - | - | - | - | 265 | 2119 | 18806 | 183822 |
| *h* | - | - | - | - | - | - | - | 1854 | 16687 | 165016 |
| *i* | - | - | - | - | - | - | - | - - | 14833 | 148329 |
| *k* | - | - | - | - | - | - | - | - - | - - | 133496 |

XXXVI.

XXXVI. Si nous divisons ces nombres par les nombres de tous les cas possibles, qui répondent à chaque nombre de cartes, nous en tirerons premièrement les espérances de A pour gagner au premier coup :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre des cartes | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | &c. |
| Espérance de A | 1, | $\frac{1}{2}$, | $\frac{1}{3}$, | $\frac{1}{4}$, | $\frac{1}{5}$, | $\frac{1}{6}$, | $\frac{1}{7}$, | $\frac{1}{8}$, | $\frac{1}{9}$, | &c. |

D'où nous concluons, que si le nombre des cartes est $= n$, l'espérance de A de gagner au premier coup sera $= \frac{1}{n}$.

XXXVII. Si nous considérons les nombres de la table §. 35, nous voyons d'abord que chaque nombre est la différence de celui qui est au dessus, & de celui qui le précede. Ainsi, si pour le nombre des cartes $m$, le nombre des cas qui font gagner A à un certain coup est $p$; & le nombre des cas qui le font gagner au même coup, si le nombre des cartes est $= m + 1$, soit $= q$, & le nombre des cas qui le font gagner au coup suivant $= r$, le nombre des cartes demeurant $= m + 1$, on aura toujours $r = q - p$.

XXXVIII. Donc pour le nombre des cartes $= m$, le nombre de tous les cas étant $= 1.2.3.4. \cdots m = M$, l'espérance de A de gagner à un certain coup sera $= \frac{p}{M}$; que je nommerai $= P$. Or pour le nombre des cartes $= m + 1$, le nombre de tous les cas étant $= M(m + 1)$, l'espérance de A de gagner au même coup sera $= \frac{q}{M(m+1)}$, qui soit posée $= Q$, & l'espérance de gagner au coup suivant $= \frac{r}{M(m+1)}$, qui soit $= R$. Cela posé on aura $R = \frac{q-p}{M(m+1)}$ ou bien $R = Q - \frac{P}{m+1}$.

 Ll XXXIX.

XXXIX. Donc posant le nombre des cartes $= n - 1$; puisque l'espérance de A de gagner au premier coup est $= \frac{1}{n-1}$; pour le nombre des cartes $= n$, l'espérance de A de gagner au second coup sera $= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-2}{(n-1)n}$.

XL. Or l'espérance de A de gagner au second coup, que le nombre des cartes est $= n - 1$ étant $\frac{n-3}{(n-2)(n-1)}$; nous en concluons, que lorsque le nombre des cartes est $= n$, son espérance de gagner au troisième coup sera $= \frac{n-2}{(n-1)n} - \frac{(n-3)}{(n-2)(n-1)n}$
$= \frac{nn-5n+7}{(n-2)(n-1)n} = \frac{(n-2)^2-(n-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

XLI. De là nous concluons de la même manière, que pour le nombre des cartes $= n$, l'espérance de A de gagner au quatrième coup sera $= \frac{(n-2)^2-(n-3)}{n(n-1)(n-2)} - \frac{(n-3)^2+(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} =$
$\frac{(n-2)^2(n-3)-2(n-3)^2+(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$: & son espérance de gagner au cinquième coup $= \frac{(n-2)^2(n-3)-2(n-3)^2+(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3} -$
$\frac{(n-3)^2(n-4)-2(n-4)^2+(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} =$
$\frac{(n-2)^2(n-3)(n-4)-3(n-3)^2(n-4)+3(n-4)^2-(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$

XLII.

XLII. Pour peu qu'on réfléchiſſe ſur la formation de ces formules, on trouvera que le nombre des cartes étant $= n$, l'eſpérance de A de gagner ſera

au premier coup $= \frac{1}{n}$

au deuxième coup $= \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$

au troiſième coup $= \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

au quatrième coup $= \frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

au cinquième coup $= \frac{1}{n} - \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} - \frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-4)}$

au ſixième coup $= \frac{1}{n} - \frac{5}{n(n-1)} + \frac{10}{n\cdots(n-2)} - \frac{10}{n\cdots(n-3)} + \frac{5}{n\cdots(n-4)} - \frac{1}{n\cdots(}$

&c.

XLIII. Donc l'eſpérance de A de gagner en général à quelque coup que ce ſoit, ſera exprimée par la ſomme de toutes ces formules priſes enſemble. Or le nombre de ces formules étant égal au nombre des cartes $n$, la ſomme de tous les premiers termes ſera $= n.\frac{1}{n} = 1$: Enſuite la ſomme des numérateurs des ſeconds termes étant $= 1 + 2 + 3 + 4 \cdots (n-1) = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$, la ſomme de tous les ſeconds termes ſera $= \frac{1}{1.\ 2}$. Depuis, parce que $1 +$

$$3 + 6 + 10 + \cdots \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2.} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.},$$

la ſomme des troiſièmes termes eſt $= \frac{1}{1.2.3}$, & la ſomme des quatrièmes $= \frac{1}{1.2.3.4}$, des cinquiémes $= \frac{1}{1.2.3.4.5}$, & ainſi de ſuite.

XLIV. De là il s'enſuit donc, que

| le nombre des cartes étant | l'eſpérance de gagner de **A** ſera |
|---|---|
| 1 | $1$ |
| 2 | $1 - \frac{1}{1.2}$ |
| 3 | $1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$ |
| 4 | $1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4}$ |
| 5 | $1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$ |
| 6 | $1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ |

prenant de cette ſuite toujours autant de termes, qu'il y a de cartes.

XLV. L'eſpérance de A eſt donc la plus grande au cas d'une carte, & la plus petite au cas de deux cartes. Enſuite on voit, que lorsque le nombre des cartes eſt impair, l'eſpérance de A eſt toujours plus grande, que pour tout nombre pair de cartes. Or ſi le nombre des cartes eſt pair, alors l'eſpérance de A eſt moindre, que pour tout nombre impair de cartes.

XLVI. Ayant trouvé l'eſpérance de A, on n'a qu'à l'ôter de l'unité, pour avoir l'eſpérance de B: car l'eſpérance de l'un & de l'autre marque la partie du dépôt, à laquelle l'un & l'autre peut prétendre en vertu de la probabilité, qu'il a de le gagner tout entier. Ainſi l'eſpérance de A étant $= x$, celle de B ſera $= 1 - x$.

XLVII. Les formules, que je viens de trouver pour l'eſpérance de A, ſe réduiront aiſément à des fractions décimales, d'où l'on jugera mieux de leur véritable valeur. Ainſi ayant fait ce calcul je trouve.

| nombre des cartes. | l'eſpérance de A | l'eſpérance de B |
|---|---|---|
| 1 | 1, 000000000 | 0, 000000000 |
| 2 | 0, 500000000 | 0, 500000000 |
| 3 | 0, 666666666 | 0, 333333333 |
| 4 | 0, 625000000 | 0, 375000000 |
| 5 | 0, 633333333 | 0, 366666666 |
| 6 | 0, 631944444 | 0, 368055555 |
| 7 | 0, 632142857 | 0, 367857143 |
| 8 | 0, 632118055 | 0, 367881945 |
| 9 | 0, 632120811 | 0, 367879189 |
| 10 | 0, 632120536 | 0, 367879464 |
| 11 | 0, 632120561 | 0, 367879439 |
| 12 | 0, 632120558 | 0, 367879442 |
| 13 | 0, 632120559 | 0, 367879441 |
| 14 | 0, 632120558 | 0, 357879442 |
| 15 | 0, 632120558 | 0, 367879442 |
| | &c. | &c. |

XLVIII. Donc, ſi nous négligeons les fractions decimales, qui ſuivent après la neuvième, on peut dire que, dès que le nombre des

 cartes

cartes est plus grand que 12, les espérances de A & de B ne varient plus, quelque grand que soit le nombre des cartes. Ainsi, lorsque le nombre des cartes n'est pas au-dessous de 12, on pourra dire que l'espérance de A est $=$ 0, 632120558, & celle de B $=$ 0, 367879442.

XLIX. Pourvû donc que le nombre des cartes ne soit pas moindre que 12. l'espérance de A sera toujours à celle de B à peu près comme 12, à 7, ou plus exactement comme 122 à 71, ou encore plus exactement comme 1720 à 1001. Ou bien parmi 19 jeux qu'on jouë, il y en aura problablement 12 qui font gagner A, & 7 qui feront gagner B.

L. Si le nombre des cartes étoit infini, l'espérance de A feroit exprimée par cette serie infinie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \&c.$$

& l'espérance de B par celle-cy

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{170} + \frac{1}{720} - \&c.$$

Or posant $e$ pour marquer le nombre, dont le logarithme est $= 1$, on fait que $\frac{1}{e}$ exprime cette dernière serie. Donc pour le cas $n = \infty$, l'espérance de A sera $= 1 - \frac{1}{e}$, & celle de $= \frac{1}{e}$ : mais on a

$$e = 2,71828182845904523536o.$$

LI. Substituant cette valeur pour $e$ on trouvera que l'espérance de A est à celle de B comme

$$1,71828182845904523536o \text{ à } 1.$$

& cette proportion sera juste aussi-tôt que le nombre des cartes sera plus grand que 20. Par conséquent elle sera très exacte pour le cas de ce jeu, comme il se jouë ordinairement, en y employant un jeu entier de 52 cartes.

* * *